



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**OPTIMALIZACE ČASU PRŮJEZDU VOZIDLA  
ZADANOU TRAJEKTORIÍ**

TIME MINIMIZATION FOR VEHICLES PASSING A GIVEN TRAJECTORY

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Jerguš Suja**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. Petr Porteš, Ph.D.**

**BRNO 2017**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Jerguš Suja**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Petr Porteš, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Optimalizace času průjezdu vozidla zadanou trajektorií**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

S využitím simulačních výpočtů stanovte optimální jízdní režim z hlediska času průjezdu zadanou trajektorií.

### **Cíle bakalářské práce:**

Student provede rešerši známých řešení optimalizačního problému.

Následně vypracuje zjednodušený matematický model pohybu vozidla a matematický popis jeho dráhy. S využitím výše uvedených kroků sestaví simulační model pro režimy jízdy vozidla po zadané trajektorii.

### **Seznam doporučené literatury:**

RAO, S. S. Engineering optimization: theory and practice. 4th ed. Hoboken: Wiley, c2009. ISBN 978-0-470-18352-6.

GILLESPIE, T. D. Fundamentals of vehicle dynamics. Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers. c1992. ISBN 15-609-1199-9.

GADOLA M., VETTURI D., CAMBIAGHI D., MANZO L. A Tool for Lap Time Simulation. SAE 962529.

BRAGHIN F., CHELI F., MELZI S., SABBIONI E. Race driver model. Computers and Structures 86, ScienceDirect. 2008. pp. 1503-1516.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt:**

Táto práca rieši modelovanie pohybu automobilu a jeho optimálnu rýchlosť v každom bode trajektórie, po ktorej sa pohybuje s cieľom minimalizovať celkový čas prejazdu. Využíva k tomu reálne dáta namerané na Masarykovom okruhu v Brne. Obsahom práce je rozbor pôsobiacich síl na dynamiku vozidla a následne zostavenie matematického modelu. Cieľom práce je najskôr nájsť optimálnu rýchlostnú charakteristiku a následne ju porovnať s reálnymi dátami. Potom model automobilu rozšíriť o nastaviteľné krídlo a zdôvodniť pozitívny vplyv tohto pridaného prvku na minimalizáciu celkového času. Simulácia je prevedená pomocou prostredia programu MATLAB.

## **Abstract:**

This bachelor's thesis deals with model building of automobile movement and its optimal speed in every single point of trajectory, with aim on minimal lap time. It uses a real data, which was measured on Masaryk circuit in Brno. Contents of thesis are analysing effecting forces on vehicle's dynamic and then building mathematic model. The main purpose is finding optimal speed characterization and compare with real data. Then, we modify model with adjustable wing and present advantage of this customization. Simulation was done by program MATLAB.

## **Klíčové slova:**

Rýchlosť, optimalizácia, automobil, krídlo.

## **Key words:**

Speed, optimization, automobile, wing.



**Bibliografická citácia:**

SUJA, J. *Optimalizace času průjezdu vozidla zadanou trajektorií*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 35 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Petr Porteš, Ph.D.

**Prehlásenie autora o pôvodnosti práce:**

*Ja, Jerguš Suja, prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením doc. Ing. Petra Porteše, Ph.D. a že som uviedol všetky použité zdroje a literatúru.*

*V Brne dňa 24.5.2017*

*Jerguš Suja*





*Veľmi rád by som sa poďakoval všetkým, ktorí mi pomáhali s tvorbou mojej bakalárskej práce. Najväčšia vďaka patrí môjmu vedúcemu práce doc. Ing. Petrovi Portešovi Ph.D. a tiež konzultantovi RNDr. Pavlovi Popelovi Ph.D. za ich čas a odborné, ale i priateľské vedenie.*

*Jerguš Suja*



# **OBSAH**

<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>Súčasný stav riešenia problému</b>	<b>13</b>
<b>1. Zostavenie modelu pohybu automobilu</b>	<b>14</b>
<b>1.1 Definovanie dôležitých veličín</b>	
1.1.1 Súradnicový systém	14
1.1.2 Krivosť	14
<b>1.2 Rozbor pôsobiacich síl</b>	
1.2.1 Odporové sily	15
1.2.2 Normálová sila	16
1.2.3 Hnacia sila a dostredivé zrýchlenie	17
1.2.4 Zhrnutie – 2. Newtonov zákon	18
<b>1.3 Silové a rýchlostné obmedzenia</b>	
1.3.1 Adhézna sila	18
1.3.2 Výkon	19
1.3.3 Maximálna rýchlosť	19
<b>2. Simulácia v prostredí MATLAB</b>	<b>20</b>
<b>2.1 Prvý optimalizačný problém</b>	
2.1.1 Účelová funkcia a obmedzenia	20
2.1.2 Modifikácia úlohy a príprava riešenia	21
2.1.3 Presná formulácia úlohy	22
<b>2.2 Druhý optimalizačný problém</b>	
2.2.1 Nastavenie krídla	24
2.2.2 Účelová funkcia a obmedzenia	25
2.2.3 Priblíženie metódy riešenia	26
2.2.4 Presná formulácia riešenia	26
<b>3. Interpretovanie výsledkov</b>	<b>28</b>
<b>3.1 Výsledky prvého optimalizačného problému</b>	<b>28</b>
<b>3.2 Výsledky druhého optimalizačného problému</b>	<b>30</b>
<b>3.3 Časová náročnosť výpočtu</b>	<b>31</b>
<b>Záver</b>	<b>33</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>34</b>
<b>Prílohy</b>	<b>35</b>

## Úvod

Prirodzenou vlastnosťou ľudstva je odjakživa si všetko zjednodušovať a urýchľovať. Najmä v posledných desaťročiach sa tomu venuje vysoká pozornosť. Záujem človeka prekonávať dosiahnuté rekordy je úrodnou pôdou pre objavovanie nových postupov a metód ako tento cieľ splniť. Vývoj technológií nám umožňuje vytvárať stále rafinovanejšie spôsoby ako zlepšiť svoje výsledky a táto práca je toho príkladom.

Budeme sa pohybovať v oblasti motoršportu, ktorý prešiel výraznými zmenami. Súčasný trend v pretekaní už nie je o zlepšovaní schopností vodiča na trati. Pretekať sa začína už v stajniach jednotlivých tímov, kde inžinierske tímy súperia medzi sebou o to, kto lepšie nastaví auto a ako dobre pripraví pilota na pretek. V tejto práci budeme hľadať optimálnu rýchlostnú charakteristiku pre pevne danú trajektóriu, ktorá môže výrazne pomôcť jazdcovi zlepšiť ich výsledný čas. Keďže funkcionári FIA z roka na rok pravidlami obmedzujú výkon motoru vozidiel, vývoj sa uberal smerom aerodynamiky, ktorá v sebe ukrývala vysoký potenciál. V druhej časti tejto práce preto skúmame vplyv aerodynamického prvku (nastaviteľného krídla) na výsledný celkový čas.

Na začiatku si podrobne popíšeme matematický model, pričom sa budeme opierať o poznatky získané z [2]. Sformulujeme optimalizačnú úlohu. Popíšeme algoritmus a proces výpočtu, ktorý implementujeme do prostredia MATLAB. Pomocou nami zostaveného programu vyšetríme reálnu úlohu a porovnáme ju s experimentálnymi dátami.

## Súčasný stav riešenia problému

Všeobecnému problému ako sa najrýchlejšie dostať z miesta A do miesta B, sa v minulosti venovalo už niekoľko autorov. Nie vždy išlo len o presun osôb pomocou dopravných prostriedkov. K tomuto problému sa dá pristupovať rôznymi spôsobmi. Najčastejší spôsob je oddelenie hľadania optimálnej trajektórie od hľadania optimálnej rýchlosti prejazdu danou trajektóriou.

Pri hľadaní optimálnej trajektórie sa snažíme nájsť krivku, tak aby bola čo najkratšia a čo najmenej krivá. Obmedzujúcim prvok sú v tomto prípade okraje vozovky. Tejto problematike sa podrobne venujú v [4], kde zostavia model optimálneho riadenia. Úlohu následne prepíšu na problém nelineárnej optimalizácie, ktorý riešia pomocou Sequential Quadratic Programming (SQP) algoritmu. Dôležitým predpokladom v tejto práci je neprešmykovanie. Osobitný prístup k tejto problematike spracováva [5]. Úloha popisuje špeciálny prípad prejazdu zákrutou s možnosťou prešmyku a je riešená pomocou numerickej optimalizácie. Tento manéver sa často využíva vo WRC (Majstrovstvá sveta v rally).

Odlišnou cestou spracováva túto problematiku práca [6]. Ako sme už spomínali, nie vždy tento problém súvisí len s presunom osôb. Táto práca hľadá optimálnu cestu pre robota za predpokladu trecích obmedzení príľnavosti dezénu. Úlohou je geometricky popísať cestu pomocou splajnou za predpokladu, že poznáme počiatočný a cieľový bod, počiatočnú rýchlosť a smer.

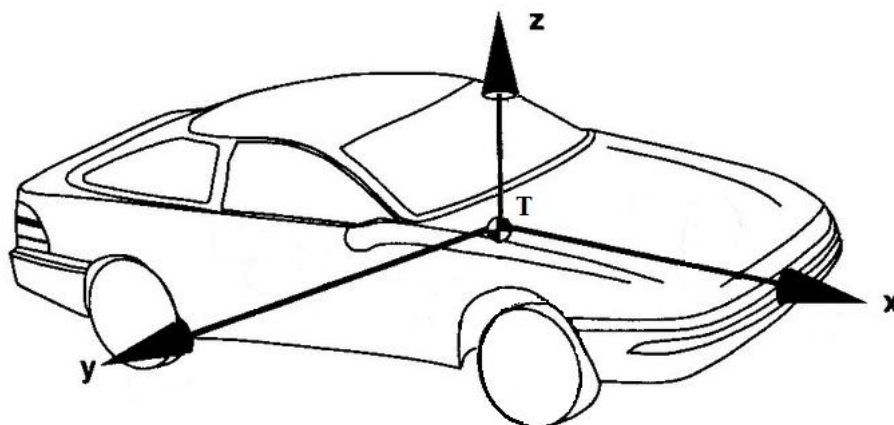
Úloha, kde hľadáme optimálnu rýchlosť pri prejazde danou trajektóriou je cieľom aj tejto bakalárskej práce. V tomto prípade máme cestu presne predpísanú a našou úlohou je nájsť optimálnu rýchlostnú charakteristiku. Obmedzujúcim faktorom je krivosť cesty, trecia sila a výkon motora. Podobný cieľ bol aj autorov práce [3]. Úlohu previedli na problematiku optimálneho riadenia a rozšírili ju o možnosť náhodnej zmeny obmedzujúcich podmienok zapríčinenú napr. počasím. Naším rozšírením bude modifikácia modelu automobilu. Budeme skúmať pozitívny alebo negatívny dopad rozšírenia o nastaviteľné krídlo na celkový čas prejazdu danou trajektóriou.

# 1. Zostavenie modelu pohybu automobilu

## 1.1 Definovanie dôležitých veličín

### 1.1.1 Súradnicový systém

V úvode práce zadefinujeme súradnicový systém, ktorý budeme v nej používať. Jeho počiatok umiestnime do ťažiska automobilu. Os  $x$  smeruje dopredu a je rovnobežná s povrchom vozovky. Os  $y$  je v rovine rovnobežnej s povrchom vozovky a je kolmá na os  $x$ . Os  $z$  je kolmá na osi  $x$  a  $y$ . Všetky tri osi sú pevne zviazané s vozidlom a spolu tvoria pravotočivý súradnicový systém. Smery jednotlivých osí sú názorne zakreslené na obr.1. Neskôr budeme uvažovať o silách, ktorých smery budú totožné s osami.

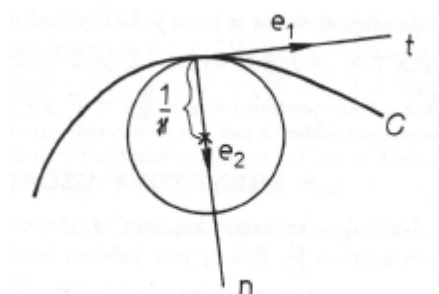


Obr. 1 Súradnicový systém

V modely tiež predpokladáme rovnaké zaťaženie na všetkých štyroch kolesách.

### 1.1.2 Krivosť

V neinflexnom bode  $f(s_0)$  krivky  $C$  existuje jediná kružnica, ktorá má s  $C$  styk 2.rádu. Jej stredom je bod  $f(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}e_2(s_0)$ . Túto kružnicu nazývame osculačná kružnica krivky  $C$  v bode  $f(s_0)$ . Číslo  $\kappa(s_0)$ , ktoré je prevrátenou hodnotou polomeru osculačnej kružnice, nazývame krivosť krivky v jej neinflexnom bode [1].



Obr. 2 Krivosť [1]

Pre potreby tejto bakalárskej práce je veľmi dôležité zadefinovať krivosť krivky, pretože v celej práci budeme uvažovať o pohybe po kružnici. Trajektória, po ktorej sa bude pohybovať náš model automobilu, je v každom bode určená práve krivosťou  $\kappa$ . Od

veľkosti krivosti sa následne odvíja veľkosť rýchlosti, ktorou je auto schopné prejsť zvolenou trajektóriou.

## 1.2 Rozbor pôsobiacich síl

### 1.2.1 Odporové sily

V našom modeli si zavedieme odporovú silu  $F_o$ , ktorá sa skladá z troch síl, a to:

- a) sila aerodynamického odporu
- b) sila valivého odporu
- c) odpor stúpania.

Sila aerodynamického odporu je jedna z dvoch síl, ktoré vznikajú pri obtekaní vzduchu karosérie automobilu. Tou druhou je vztlaková sila (v práci s ňou budeme pracovať pri záporných hodnotách, preto sa niekedy označuje ako pritlačná sila).

Aerodynamický odpor pri rýchlostiach, v oblasti ktorých budeme pracovať, môžeme brať za najvýznamnejšiu zložku odporovej sily. Je to následok pôsobenia trecích a tlakových síl. V prvom prípade je to spôsobené viskozitou vzduchu. Viskózna tekutina vnútorným trením pôsobí proti pohybu, čiže šmykové napätie medzi vrstvami vzduchu je príčinou trecieho aerodynamického odporu. V druhom prípade tieto tlakové sily vznikajú rozdielom tlaku v prednej a zadnej časti automobilu. Predstavme si prúdiaci vzduch, ktorý naráža na prednú časť automobilu (kapotu, nárazník), jeho rýchlosť klesá, čiže podľa Bernoulliho rovnice tlak rastie. Naopak, v zadnej časti automobilu zvířený prúd vzduchu dosahuje vysokú rýchlosť, čiže tlak klesá. Tento jav má za následok vznik tlakovej sily, ktorá pôsobí proti pohybu automobilu. Explicitne veľkosť tejto sily vyjadríme vzťahom,

$$F_{OA} = \frac{1}{2} c_d \rho S_x v^2 \quad (1)$$

kde  $c_d$  je súčiniteľ aerodynamického odporu,  $\rho$  predstavuje hustotu vzduchu prúdiaceho okolo automobilu,  $S_x$  vyjadruje plochu čelného priemetu auta a  $v$  je rýchlosť akou sa pohybuje automobil (predpokladáme nulovú rýchlosť vzduchu).

Kvôli optimalizácii, ktorou sa budeme zaoberať neskôr, si ešte zadefinujeme závislosť súčiniteľa aerodynamického odporu na súčiniteli aerodynamického vztlaku,

$$c_d = k(c_l - c_{l0})^2 + c_{d0} \quad (2)$$

kde  $k$  je polárny koeficient,  $c_l$  vyjadruje súčiniteľ aerodynamického vztlaku a  $c_{l0}, c_{d0}$  sú štartovacie hodnoty, ktoré sú minimálne pre  $c_d$ .

Valivý odpor je druhá najvýznamnejšia zložka odporovej sily, ktorá sa prejavuje hlavne pri nižších rýchlostiach. Zatiaľ čo ostatné zložky odporovej sily pôsobia za určitých podmienok, valivý odpor je prítomný hneď od začiatku odvažovania sa kolies. Veľkosť tejto sily možno vyjadriť ako súčin váhy vozidla a súčiniteľa valivého odporu, avšak kvôli závislosti súčiniteľa na rýchlosti a pre potreby práce vyjadríme silu valivého odporu,

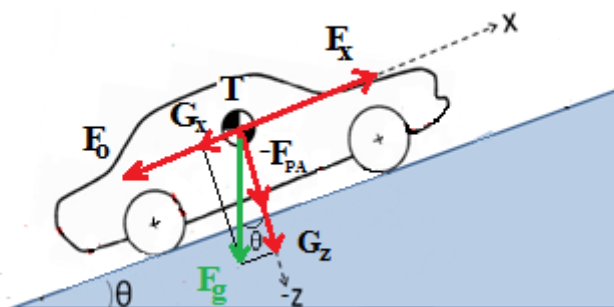
$$F_{RR} = a + bv \quad (3)$$

kde  $a, b$  sú konštanty zahrňujúce súčiniteľ valivého odporu a váhu automobilu.

Odpor stúpania je tretia zložka odporovej sily, ktorú do nášho modelu zakomponujeme. Má ho za následok gravitačná sila. V prípade, keď sa auto pohybuje do kopca, zložka gravitačnej sily v osi  $x$  pôsobí proti pohybu automobilu. Avšak v prípade pohybu z kopca táto zložka pôsobí v smere pohybu, v tomto prípade je to vítaná sila.

$$G_x = Mg \sin \theta \quad (4)$$

V uvedenom vzťahu  $M$  je hmotnosť automobilu,  $g$  značí gravitačné zrýchlenie a  $\theta$  je uhol, ktorý zvierajú vozovka s horizontálou. Z axiómou a z viet platných v geometrii môžeme povedať, že rovnako veľký uhol zvierajú aj gravitačná sila s osou  $z$ . Taktiež uhol  $\theta$  je funkciou dráhy. Názorne sme tieto sily zakreslili do obr. 3.



Obr. 3 Rovina  $x$ - $z$

### 1.2.2 Normálová sila

Silu, ktorou pôsobí automobil kolmo na vozovku, nazývame normálovou silou. Jej smer je záporný voči smeru osi  $z$ . V našom modeli sa táto sila skladá z dvoch zložiek. Prvou zložkou je zložka gravitačnej sily v osi  $z$ . Už v predchádzajúcej kapitole sme definovali  $G_x$  ako zložku gravitačnej sily premietnutú do osi  $x$ , preto môžeme definovať jej druhú zložku.

$$G_z = Mg \cos \theta \quad (5)$$

Ďalšou zložkou normálovej sily v našom modeli je aerodynamický vztlak. Jeho veľkosť je závislá od rýchlosti automobilu a súčiniteľa aerodynamického vztlaku,

$$F_{PA} = \frac{1}{2} c_l \rho S_x v^2 \quad (6)$$

Podľa 3. Newtonova zákona, akcie a reakcie, pôsobí vozovka rovnako veľkou silou opačného smeru na automobil, ako pôsobí automobil na vozovku. Túto silu označíme  $F_z$ .

V prvom optimalizačnom probléme budeme počítať s modelom, ktorý nemá nastaviteľné krídlo poskytujúce vztlak. Preto veľkosť normálovej sily bude závislá jedine od dráhy kvôli uhlu  $\theta$ . V druhom optimalizačnom probléme pridáme toto nastaviteľné krídlo a budeme skúmať jeho optimálnu polohu v priebehu pohybu automobilu. Normálová sila bude teda závislá od troch veličín, a to dráhy, rýchlosti a súčiniteľa aerodynamického vztlaku. Aerodynamický vztlak zohrá významnú rolu v našej druhej optimalizačnej úlohe a bude mať dopad na výsledok simulácie.



### 1.2.3 Hnacia sila a dostredivé zrýchlenie

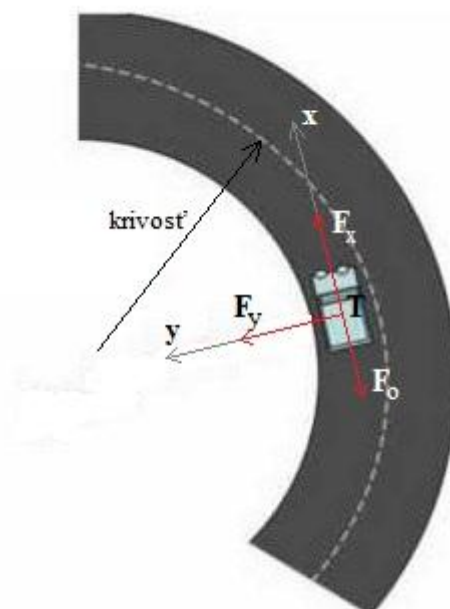
Pohyb môžeme z hľadiska zmeny rýchlosti rozdeliť na rovnomerný, rovnomerne zrýchlený, nerovnomerne zrýchlený, rovnomerne spomalený a nerovnomerne spomalený pohyb. V tejto práci sa budeme zaoberať všetkými druhmi pohybu.

Označíme  $F_x$  ako silu, ktorá pôsobí v našom hmotnom bode modelu automobilu a nazveme ju hnacia sila. Jej smer je totožný so smerom osi x. Na to, aby sa auto pohlo, je nutné naň pôsobiť silou. Túto silu autu poskytuje motor. V súčasnosti poznáme viac druhov motorov (spaľovací, elektrický, hydraulický, ...). Cieľom tejto práce nie je špeciálne riešiť problematiku motora, pre nás je dôležité si uvedomiť, že motor poskytuje silu  $F_x$  v kladnom zmysle osi x. V prípade, keď hnacia sila nadobúda záporné hodnoty, hovoríme o brzdení. Zariadenie, ktoré poskytuje záporné hodnoty sily  $F_x$ , sa nazýva brzdy.

Tak, ako sme rozdelili pohyb z hľadiska zmeny rýchlosti, môžeme pohyb rozdeliť aj z hľadiska tvaru trajektórie na priamočiary a krivočiari. Ako sme naznačili vyššie, dôležitý pojem v tejto práci je krivosť, a to z toho dôvodu, že v celej práci budeme pracovať s krivočiarym pohybom, ktorý si rozdelíme na segmenty pohybu po kružnici. Pri pohybe po kružnici sa mení s časom smer vektoru rýchlosti a môže sa meniť aj veľkosť rýchlosti. Zmenu smeru vyjadruje dostredivé zrýchlenie  $a_y$ . Zmenu veľkosti rýchlosti popisuje tečné zrýchlenie  $a_x$ . Platí,

$$a_y = \kappa v^2 \quad (7)$$

kde  $\kappa$  je krivosť. Keď dostredivé zrýchlenie  $a_y$  vynásobíme hmotnosťou auta  $M$ , dostaneme dostredivú silu  $F_y$ . Tá pôsobí vždy do stredu krivosti. Na obr. 4 sú názorne zakreslené smery pôsobiacich síl v rovine x-y.



Obr. 4 Rovina x-y

### 1.2.4 Zhrnutie - 2. Newtonov zákon

Podľa 2. Newtonova zákona  $\sum F = ma$  môžeme zhrnúť všetky zadefinované sily do rovníc, ktoré popisujú model pohybu automobilu nasledovne:

$$Ma_x = F_x - F_{RR} - F_{OA} - G_x \quad (8)$$

$$Ma_y = F_y \quad (9)$$

$$Ma_z = F_z - G_z + F_{PA} \quad (10)$$

Po dosadení (1), (2), (3), (4), (5), (6) a (7) do (8), (9) a (10) dostaneme

$$Ma_x = F_x - (a + bv) - \frac{1}{2} [k(c_l - c_{l0})^2 + c_{d0}] \rho S_x v^2 - Mg \sin \theta \quad (11)$$

$$Mkv^2 = F_y \quad (12)$$

$$Ma_z = F_z - Mg \cos \theta + \frac{1}{2} c_l \rho S_x v^2 \quad (13)$$

Ďalej predpokladáme, že automobil nebude konať pohyb v smere osi z, preto uvažujeme  $a_z = 0$ . Následne upravíme vzťah (13) do formy:

$$F_z = Mg \cos \theta - \frac{1}{2} c_l \rho S_x v^2 \quad (14)$$

Sústava rovníc (11), (12) a (14) presne definuje pohyb automobilu po vozovke. Budeme s ňou pracovať v priebehu celej práce, preto bolo veľmi dôležité tieto zákonitosti podrobne zadefinovať.

## 1.3 Silové a rýchlostné obmedzenia

V tejto kapitole zavedieme silové a rýchlostné obmedzenia. Pôjde o vytýčenie maximálnych hraníc, po ktorých sa môžu pohybovať hnacia a dostredivá sila (12). Rýchlostné obmedzenie nám určí interval, v ktorom sa môže pohybovať rýchlosť.

### 1.3.1 Adhézna sila

Naše prvé obmedzenie bude obmedzenie v závislosti od adhéznej sily. Toto obmedzenie vyplýva z predpokladu, že pneumatiky dokážu preniesť len určitú silu na vozovku. Obmedzujúcim faktorom je práve trenie, ktoré všeobecne vyjadríme vzťahom:

$$F_t = \mu F_z \quad (15)$$

V našom modeli bude tiež dôležité, v akom smere prenášajú pneumatiky silu, či už pôjde o hnaciu, alebo dostredivú silu. Preto zadefinujeme adhéznú elipsu, ktorá vzťahom popíše maximálnu veľkosť výslednej prenášanej sily medzi pneumatikou a vozovkou:

$$\left( \frac{F_x}{\mu_x F_z} \right)^2 + \left( \frac{F_y}{\mu_y F_z} \right)^2 \leq 1 \quad (16)$$

Teda  $\mu_x$  a  $\mu_y$  sú súčinitele trenia v smeroch osí podľa ich indexov,  $F_z$  sa rovná normálovej sile a  $F_x$ ,  $F_y$  sú v tomto prípade maximálne sily (hranice), ktoré sú

pneumatiky schopné preniesť. Čiže ide o maximálne veľkosti hnacej a dostredivej sily. Toto obmedzenie môžeme v realite interpretovať ako podmienku pre nevybočenie z trajektórie.

### 1.3.2 Výkon

Druhé obmedzenie, ktoré zadefinujeme, bude obmedzenie z dôvodu výkonu motora. Toto obmedzenie predpíšeme len pre kladné hodnoty hnacej sily, keďže ide o výkon a v našom modeli prácu vykonáva jedine motor.

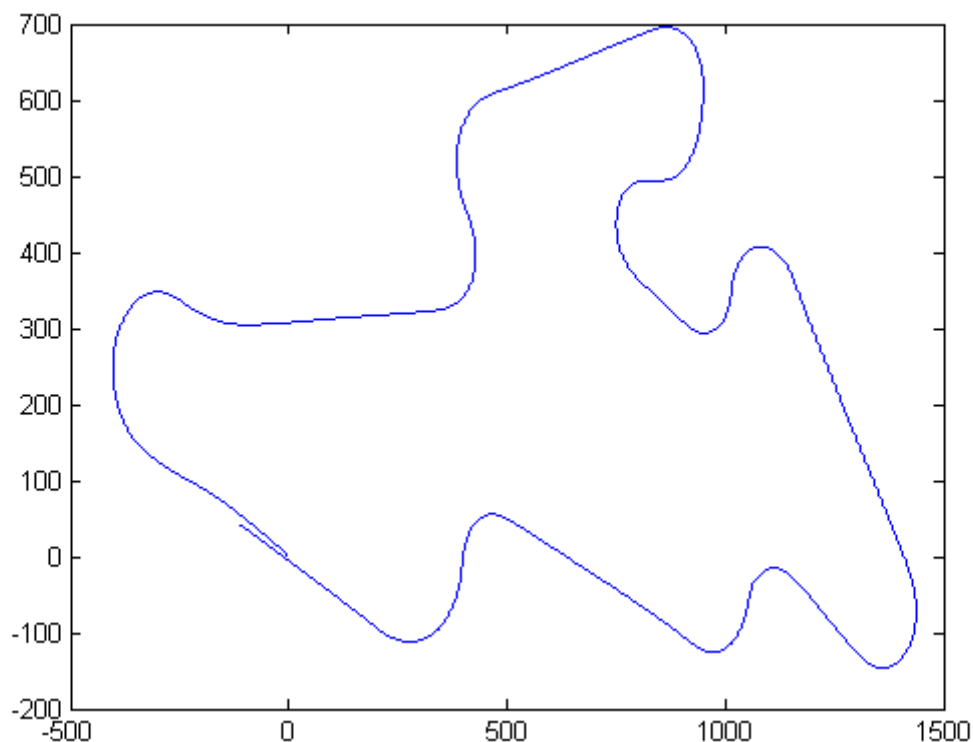
$$F_x v \leq P_{max} \quad (17)$$

Výkon je v tomto vzťahu označený  $P_{max}$ . Tento predpis možno tiež interpretovať tak, že nepripustíme nekonečne veľké tečné zrýchlenie.

### 1.3.3 Maximálna rýchlosť

Predchádzajúce dve obmedzenia boli obmedzenia silového charakteru, teraz si však zavedieme rýchlostné obmedzenie. Predpokladajme, že pri našom simulovanom pohybe sa bude automobil pohybovať jedine dopredu, čiže vylúčime cúvanie. Toto obmedzenie budeme interpretovať podmienkou nezápornosti rýchlosti. Ďalej budeme očakávať, že automobil má z technických dôvodov predpísanú maximálnu rýchlosť. Na základe týchto predpokladov predpíšeme podmienku pre rýchlosť:

$$0 \leq v \leq v_{max} \quad (18)$$



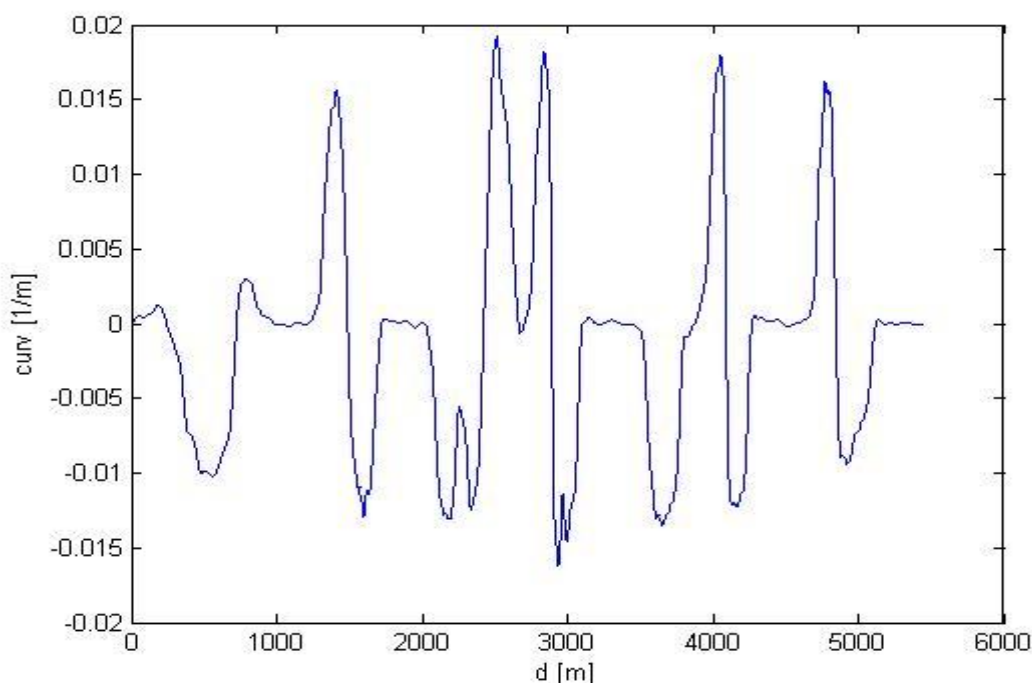
Obr. 5 Masarykov okruh

## 2. Simulácia v prostredí MATLAB

### 2.1 Prvý optimalizačný problém

#### 2.1.1 Účelová funkcia a obmedzenia

Cieľom tejto práce je minimalizovať celkový čas a s týmto zámerom prevedieme niekoľko úvah pre dosiahnutie tohto cieľa. V prvom rade je dôležité si uvedomiť, že cieľom práce nie je hľadať optimálnu trajektóriu. Teda pracujeme so vstupnými dátami, ktoré presne popisujú optimálnu trajektóriu. Zaoberáme sa trajektóriou, ktorá je popísaná množinou bodov, kde každý bod je presne definovaný súradnicami X, Y, Z a krivosťou  $\kappa$ . Z tohto dôvodu úlohu modifikujeme na úlohu diskrétnu. Vďaka Ústavu automobilového a dopravného inžinierstva táto práca rieši reálnu úlohu, kde trajektórie pochádzajú z meraní na Masarykovom okruhu v Brne, pozri obr.5. Spomínaná krivosť a jej priebeh v závislosti od dráhy je znázornená na obr.6.



Obr. 6 Závislosť krivosti na dráhe

Medzi dvoma susednými bodmi predpokladáme rovnomerne zrýchlený alebo rovnomerne spomalený pohyb. Označme bod v ktorom sa nachádzame, indexom  $i + 1$  a predchádzajúci bod indexom  $i$ . Platia všeobecne známe nelineárne rovnice:

$$v_{i+1} = v_i + a_{x_{i+1}} \Delta t_{i+1} \quad (19)$$

$$s_{i+1} = v_i \Delta t_{i+1} + \frac{1}{2} a_{x_{i+1}} \Delta t_{i+1}^2 \quad (20)$$

Jednotlivé premenné predstavujú nasledovné veličiny:  $v_{i+1}$  je rýchlosť v bode  $i + 1$ ,  $v_i$  rýchlosť v bode  $i$ . Analogicky potom  $a_{x_{i+1}}$  je veľkosť tečného zrýchlenia v bode  $i + 1$ ,  $\Delta t_{i+1}$  je čas, za ktorý automobil prešiel z bodu  $i$  do bodu  $i + 1$  a  $s_{i+1}$  je dráha, absolvovaná automobilom z bodu  $i$  do bodu  $i + 1$ .

Odvodením a úpravou vzťahov (19) a (20) môžeme vyjadriť celkový čas nasledovne:

$$t = \sum_{i=0}^n \frac{2s_{i+1}}{v_{i+1} + v_i} \quad (21)$$

Posledným krokom je matematická formulácia optimalizačného problému. Hľadáme minimálny čas a našou premennou je rýchlosť:

$$\min_{v_{i+1}} t = \sum_{i=0}^n \frac{2s_{i+1}}{v_{i+1} + v_i} \quad (22)$$

Aby bol problém kompletný, predpíšeme mu obmedzenia (16), (17) a (18). Podmienky (16) a (17) sme predtým formulovali ako silové obmedzenia, avšak v tomto prípade za sily  $F_x, F_y$  a  $F_z$  dosadíme (11), (12) a (14). Túto úpravu robíme kvôli tomu, že naša premenná je v tejto úlohe rýchlosť. Teda obmedzenia silové musíme upraviť na obmedzenia rýchlostné.

### 2.1.2 Modifikácia úlohy a príprava riešenia

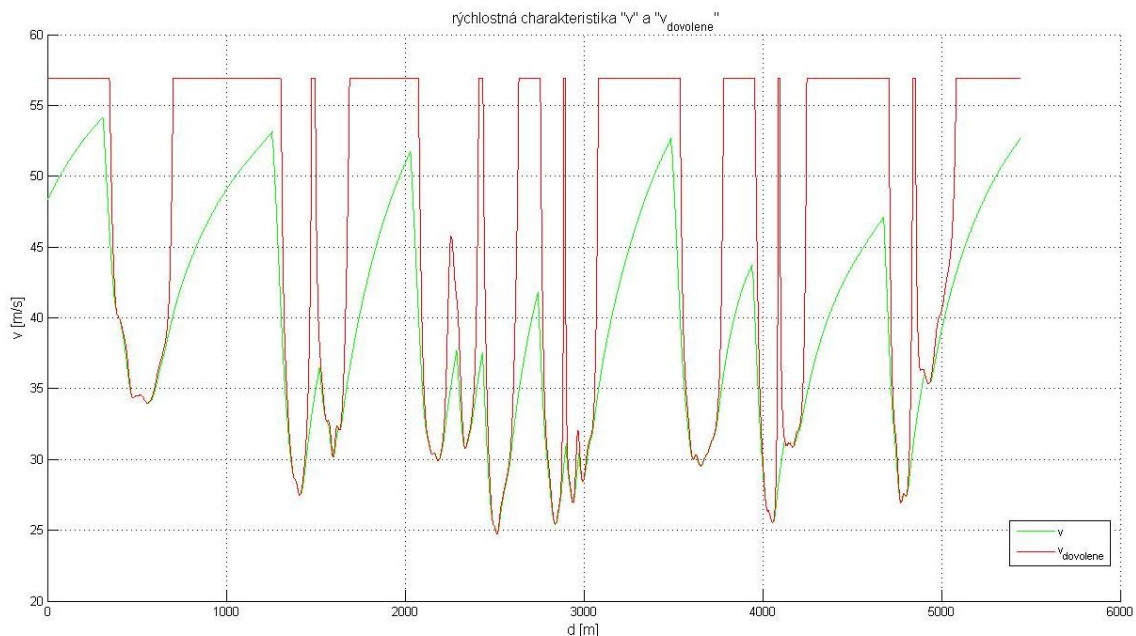
Z dôvodu silnej nelinearity úlohy modifikujeme predchádzajúci zadefinovaný problém. Predpokladáme, že existuje nezávislosť riešenia medzi jednotlivými bodmi. V tom prípade môžeme hľadať minimálny čas osobitne v každom bode. Z tohto predpokladu plynie ďalšia úprava, ktorou si pôvodný problém uľahčíme. V prípade, že body sú na sebe nezávislé, môžeme považovať problém, kde maximalizujeme rýchlosť, za ekvivalentný problému minimalizácie času.

$$\max v_{i+1} \quad (23)$$

Skôr, než presne formulujeme úlohu, je potrebné pripraviť si pomocný medzivýpočet. Podstatou tohto medzivýpočtu je nájdenie rýchlostnej charakteristiky, kde sa obmedzíme jedine krivosťou a  $v_{max}$ . Zároveň uvažujme, že  $a_x, c_l = 0$ . Riešme (23) s obmedzeniami (18) a (24):

$$\left( \frac{a + bv_{dovolené} + \frac{1}{2}[k(-c_{l0})^2 + c_{d0}]\rho S_x v_{dovolené}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}}{\mu_x(Mg \cos \theta_{i+1})} \right)^2 + \left( \frac{Mkv_{dovolené}^2}{\mu_y(Mg \cos \theta_{i+1})} \right)^2 \leq 1 \quad (24)$$

Výsledné hodnoty rýchlosti označíme  $v_{dovolené}$ . Dôvodom tohto medzivýpočtu je, že nám posluží ako riadiaci prvok. V podstate, výsledná rýchlostná charakteristika (jej výpočtu sa podrobne venujeme v ďalšej podkapitole), ktorú hľadáme, sa snaží priblížiť charakteristike  $v_{dovolené}$ . Snaha o toto priblíženie je zachytená na obr. 7. Všimnime si, že v lokálnych minimách sa charakteristiky dotýkajú. Predpoklad medzivýpočtu je  $a_x = 0$ , to znamená, že náš model pri prechode zákrutou, v miestach s najvyššou krivosťou (lokálne minimum rýchlostnej charakteristiky), má  $a_x = 0$ . Teda automobil pred zákrutou začína brzdiť ( $a_x < 0$ , charakteristiky sa nedotýkajú), v mieste s najvyššou krivosťou ide konštantnou rýchlosťou ( $a_x = 0$ , charakteristiky sa dotýkajú) a pri výjazde zo zákruty zrýchľuje ( $a_x > 0$ , charakteristiky sa nedotýkajú).



Obr. 7 Rýchlostná charakteristika  $v_{dovolené}$

### 2.1.3 Presná formulácia úlohy

V nasledujúcej podkapitole presne popíšeme priebeh výpočtu v dvoch rôznych pohybových situáciách, a to pri zrýchlení a pri brzdení. V priebehu celého výpočtu prvej optimalizačnej úlohy uvažujeme, že  $c_l = 0$ . Pre zjednodušenie zápisov polynómov v celej nasledujúcej podkapitole označme  $c = \frac{1}{2}[k(c_l - c_{l0})^2 + c_{d0}]\rho S_x$ .

**ZRÝCHLENIE** je pohyb, pri ktorom rastie rýchlosť. V našom diskretnom probléme to vyjadríme ako  $v_{i+1} > v_i$ . Aby sme mohli zrýchľovať, musí byť splnená podmienka  $v_{i+1} \leq v_{dovolené_{i+1}}$ , kde  $v_{dovolené_{i+1}}$  je maximálna rýchlosť vzhľadom na zakrivenie. Túto hodnotu sme vypočítali už v predchádzajúcej kapitole a označili sme ju ako medzivýpočet. Hodnota  $v_{i+1}$  je v tomto prípade maximum z intervalu, ktorý dostaneme prienikom intervalov získaných z obmedzení (16), (17) a (18).

Pri stanovení hraníc prvého intervalu vychádzame z obmedzenia (18), pre ktoré platí  $0 \leq v_{i+1} \leq v_{max}$ , a preto môžeme uvažovať, že interval je  $v_{i+1} \in \langle 0, v_{max} \rangle$ .

Ďalším obmedzením je adhézne obmedzenie (16). Keďže je vo forme silového obmedzenia, upravíme ho na rýchlostné. V prvom rade vyjadríme  $F_x$  z (11) a za tečné zrýchlenie dosadíme  $a_{x_{i+1}} = \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{2s_{i+1}}$ . Tento vzťah sme získali pomocou sústavy nelineárnych rovníc (19) a (20). Za  $F_z$  dosadíme (14). Potom z (16) dostávame polynóm štvrtého stupňa:

$$\begin{aligned}
& \left( M^2 + 4cMs_{i+1} + 4c^2s_{i+1}^2 + \frac{4s_{i+1}^2M^2\mu_x^2\kappa_{i+1}^2}{\mu_y^2} \right) v_{Amax}^4 + (4bMs_{i+1} + 8bcs_{i+1}^2)v_{Amax}^3 \\
& + (-2M^2v_i^2 + 4aMs_{i+1} + 4M^2g \sin \theta_{i+1} s_{i+1} - 4cMs_{i+1}v_i^2 + 8acs_{i+1}^2 \\
& + 4b^2s_{i+1}^2 + 8cMg \sin \theta_{i+1} s_{i+1}^2)v_{Amax}^2 \\
& + (-4bMs_{i+1}v_i^2 + 8abs_{i+1}^2 + 8bMg \sin \theta_{i+1} s_{i+1}^2)v_{Amax} + (M^2v_i^4 - 4aMs_{i+1}v_i^2 \\
& - 4M^2g \sin \theta_{i+1} s_{i+1}v_i^2 + 4a^2s_{i+1}^2 + 8aMg \sin \theta_{i+1} s_{i+1}^2 + 4M^2g^2 \sin^2 \theta_{i+1} s_{i+1}^2 \\
& - 4s_{i+1}^2M^2g^2 \cos^2 \theta_{i+1} \mu_x^2) = 0
\end{aligned}$$

Riešením rovnice sú štyri korene, avšak my si zvolíme maximálny, reálny koreň. Vypočítali sme najväčší prvok hľadaného intervalu. Za najmenší prvok intervalu môžeme, bez ujmy na správnosti riešenia, zvoliť nulu. Teda  $v_{i+1} \in \langle 0, v_{Amax} \rangle$ .

Posledný interval určuje výkonové obmedzenie (17). Podobne ako v predchádzajúcom prípade, aj toto obmedzenie je silové. Aby sme ho mali vo forme rýchlostného obmedzenia, postupujeme analogicky ako pri adhéznom obmedzení. Vyjadríme si  $F_x$  z (11), z rovníc (19) a (20) vyjadríme  $a_{x_{i+1}}$  a dosadením do (17) dostaneme polynóm tretieho stupňa:

$$(M + 2cs_{i+1})v_{Pmax}^3 + (2bs_{i+1})v_{Pmax}^2 + (-Mv_i^2 + 2as_{i+1} + 2Mg \sin \theta_{i+1} s_{i+1})v_{Pmax} + (-2P_{max}s_{i+1}) = 0$$

Maximálny, reálny koreň berieme ako najväčší prvok výkonového intervalu rýchlosti. Za najmenší prvok môžeme znovu, bez ujmy na správnosti riešenia, zvoliť nulu. Preto rýchlostný interval obmedzený výkonom bude  $v_{i+1} \in \langle 0, v_{Pmax} \rangle$ .

Keď máme vypočítané všetky intervaly, prienikom získame množinu všetkých prípustných riešení  $v_{i+1} \in \langle 0, v_{max} \rangle \cap \langle 0, v_{Amax} \rangle \cap \langle 0, v_{Pmax} \rangle$ . Keďže našou úlohou je maximalizovať rýchlosť, z výsledného intervalu volíme maximálnu hodnotu  $v_{i+1}$ . V prípade, že nájdená hodnota spĺňa podmienku zrýchľovania  $v_{i+1} \leq v_{dovolene_{i+1}}$ , dopočítame všetky zvyšné veličiny. Obzvlášť dôležité je dopočítať čas  $\Delta t_{i+1}$ . V prípade, že nájdená hodnota nespĺňa podmienku zrýchľovania  $v_{i+1} > v_{dovolene_{i+1}}$ , nastáva druhý pohybový stav, a to brzdenie:

**BRZDENIE** je pohyb pri ktorom klesá rýchlosť. V našom diskretnom probléme to vyjadríme ako  $v_{i+1} < v_i$ . Dôležité je uvedomiť si, že sila  $F_x$  má pri brzdení opačné znamienko ako pri zrýchlení a vzniká pôsobením bŕzd. Teda pri brzdení neberieme do úvahy výkonové obmedzenie. V našom programe tento pohybový stav prevedieme špecifickou spätnou iteráciou, ktorú bližšie interpretujeme.

Nachádzame sa v bode, kde  $v_{i+1} > v_{dovolene_{i+1}}$ , pričom  $v_{dovolene_{i+1}}$  je najväčšia možná rýchlosť, akou môžeme daným bodom prejsť vzhľadom ku krivosti a maximálnej adhéznej sile. Predpokladáme rovnosť  $v_{i+1} = v_{dovolene_{i+1}}$ . Tento predpoklad však musí spĺňať adhézne obmedzenie. Po dosadení  $v_{i+1}$  do upravenej (16) môžu nastať 2 prípady:

- Upravená nerovnosť (16) bude splnená. Potom len dopočítam zvyšné veličiny, pričom podstatná je hodnota času  $\Delta t_{i+1}$ .
- Upravená nerovnosť (16) nebude platiť. Toto je prípad spomínanej špecifickej spätnej iterácie.

Princíp spätnej iterácie spočíva v tom, že podľa adhézneho obmedzenia spätne iterujeme a upravujeme rýchlosť, pokiaľ nebude splnené toto obmedzenie pre všetky upravované rýchlosti. Zjednodušene, nachádzame sa v bode  $i + 1$  a poznáme rýchlosť  $v_{i+1}$ . Hľadáme rýchlosť  $v_i$  tak, aby bola splnená upravená podmienka (16). Posunieme sa do bodu  $i$ , kde poznáme  $v_i$  a opäť hľadáme rýchlosť  $v_{i-1}$  tak, aby bola splnená upravená (16). Pokračujeme až kým nájdená rýchlosť  $v_{i-k}$  nie je väčšia alebo rovná pôvodnej rýchlosti v tomto bode. Vzťah pre výpočet  $v_{i-k}$  vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} & \left( M^2 - 4cMs_{i+1-k} + 4c^2s_{i+1-k}^2 + \frac{4s_{i+1-k}^2 M^2 \mu_x^2 \kappa_{i-k}^2}{\mu_y^2} \right) v_{i-k}^4 \\ & + (-4bMs_{i+1-k} + 8bcs_{i+1-k}^2) v_{i-k}^3 \\ & + (-2M^2 v_{i+1-k}^2 - 4aMs_{i+1-k} - 4M^2 g \sin \theta_{i+1-k} s_{i+1-k} + 4cMs_{i+1-k} v_{i+1-k}^2 \\ & + 8acs_{i+1-k}^2 + 4b^2 s_{i+1-k}^2 + 8cMg \sin \theta_{i+1-k} s_{i+1-k}^2) v_{i-k}^2 \\ & + (4bMs_{i+1-k} v_{i+1-k}^2 + 8abs_{i+1-k}^2 + 8bMg \sin \theta_{i+1-k} s_{i+1-k}^2) v_{i-k} \\ & + (M^2 v_{i+1-k}^4 + 4aMs_{i+1-k} v_{i+1-k}^2 + 4M^2 g \sin \theta_{i+1-k} s_{i+1-k} v_{i+1-k}^2 + 4a^2 s_{i+1-k}^2 \\ & + 8aMg \sin \theta_{i+1-k} s_{i+1-k}^2 + 4M^2 g^2 \sin^2 \theta_{i+1-k} s_{i+1-k}^2 \\ & - 4s_{i+1-k}^2 M^2 g^2 \cos^2 \theta_{i+1-k} \mu_x^2) = 0 \end{aligned}$$

Ako sme už naznačili  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Spätaná iterácia končí v momente, keď je splnená nerovnosť  $v_{i-k} \geq v_{pôvodná_{i-k}}$ . V každom  $k$  kroku po nájdení novej rýchlosti  $v_{i-k}$ , musíme prepočítať všetky pôvodné veličiny. Výnimkou nie je ani  $\Delta t_{i+1-k}$ . Hodnota  $i - k$  presne určí bod, v ktorom automobil musí začať brzdiť, aby v  $k$  krokoch ubrzdlil na hodnotu  $v_{i+1}$ .

Podrobnému popisu optimálneho zrýchľovania a brzdenia, sa venujú autori E. Velenis a P. Tsiotras vo svojej práci [2]. Spôsob nájdenia optimálnej rýchlosti, ktorý sme vyššie popísali, sa opiera o teoretické znalosti dokázané v zmienenej práci. Keďže autori používali metódu optimálneho riadenia, ktorá nie je v rozsahu našich teoretických schopností, spôsob riešenia sme upravili do formy, akú sme si popísali pred chvíľou.

## 2.2 Druhý optimalizačný problém

V tejto kapitole sa budeme venovať upravenému prvému optimalizačnému problému. Táto úprava spočíva v rozšírení predstavy modelu automobilu o nastaviteľné krídlo.

### 2.2.1 Nastavenie krídla

Klasickú predstavu automobilu doplníme o vystupujúci prvok z karosérie, ktorý má za úlohu poskytnúť pohybujúcemu sa autu vztlakovú silu. Jej smer je závislý práve od súčiniteľa aerodynamického vztlaku. Budeme pracovať so zápornou vztlakovou silou, ktorej smer je opačný voči smeru osi  $z$ .

Definujeme nastavenie krídla  $u$ . Uvažujeme o nastavení krídla na obmedzenom intervale  $u \in \langle u_{min}, u_{max} \rangle$ . Súčiniteľ aerodynamického vztlaku je funkciou nastavenia krídla  $u$ . Symbolicky túto závislosť vyjadríme ako:

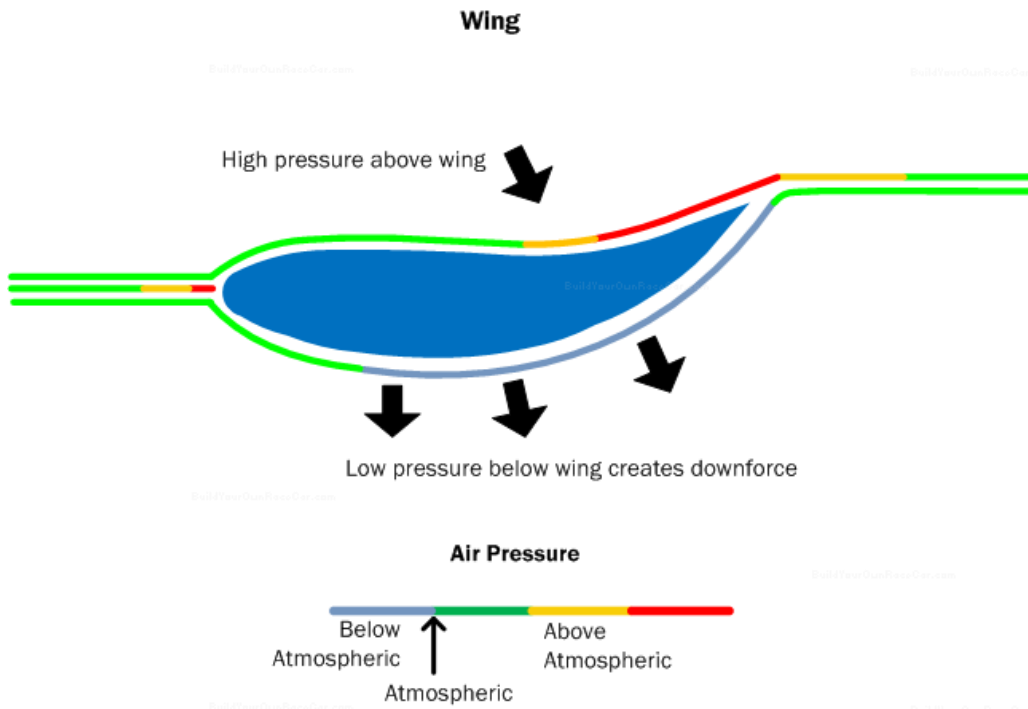
$$c_l = f(u) \quad (25)$$



Kvôli tomu, že v práci bude  $c_l$  premenná, pre ktorú budeme hľadať optimálne nastavenie, presnejšie ju opíšeme nasledovne:

- Nastavenie krídla  $u$  a teda aj súčiniteľ  $c_l$  môže byť funkciou času  $t$  alebo celkovej dráhy  $d = \sum_{i=1}^n s_{i+1}$ .
- $c_{l_{min}} = f(u_{min}) = -4$
- $c_{l_{max}} = f(u_{max}) = 0$
- $c'_l = konst > 0$  pre  $u \in \langle u_{min}, u_{max} \rangle$ ,  $c_l = f(u)$  je teda lineárna funkcia.

Premennú  $u$  si jednoducho môžeme predstaviť ako sklon krídla v stupňoch, ktorý môžeme meniť v určitých medziach. Tento sklon nie je v našej práci veľmi podstatný, dôležitejšia je hodnota súčiniteľa aerodynamického vztlaku.



Obr. 8 Krídlo [7]

### 2.2.1 Účelová funkcia a obmedzenia

V priebehu celej prvej optimalizačnej úlohy sme počítali s hodnotou  $c_l = 0$ . Podstatou druhej optimalizačnej úlohy je, naopak, nájsť optimálny priebeh funkcie  $c_l = f(t)$  alebo  $c_l = f(d)$ . Cieľom stále ostáva minimalizácia času.

Formulácia tohto modifikovaného problému je podobná formulácii prvého optimalizačného problému. Teraz však uvažujeme o závislosti rýchlosti od súčiniteľa aerodynamického vztlaku  $v_{i+1}(c_l)$ . Úloha v tomto prípade vyzerá nasledovne:

$$\min_{v_{i+1}(c_l)} t = \sum_{i=0}^n \frac{2s_{i+1}}{v_{i+1}(c_l) + v_i} \quad (26)$$

$$0 \leq v \leq v_{max} \quad (27)$$

$$\left( \frac{M \frac{v_{Amax}^2 - v_i^2}{2s_{i+1}} + a + bv_{Amax} + \frac{1}{2}[k(c_l - c_{l0})^2 + c_{d0}]\rho S_x v_{Amax}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}}{\mu_x \left( Mg \cos \theta_{i+1} - \frac{1}{2} c_l \rho S_x v_{Amax}^2 \right)} \right)^2 + \left( \frac{Mkv_{Amax}^2}{\mu_y \left( Mg \cos \theta_{i+1} - \frac{1}{2} c_l \rho S_x v_{Amax}^2 \right)} \right)^2 \leq 1 \quad (28)$$

$$\left( M \frac{v_{Pmax}^2 - v_i^2}{2s_{i+1}} + a + bv_{Pmax} + \frac{1}{2}[k(c_l - c_{l0})^2 + c_{d0}]\rho S_x v_{Pmax}^2 + Mg \sin \theta_{i+1} \right) v_{Pmax}^2 \leq P_{max} \quad (29)$$

Doplníme obmedzujúcu podmienku pre súčiniteľ aerodynamického vztlaku:

$$c_l \in \langle -4; 0 \rangle \quad (30)$$

Tak ako v predchádzajúcej úlohe, tak aj túto úlohu si zjednodušíme na základe predpokladu bodovej nezávislosti riešení. Naším cieľom bude teda maximalizovať rýchlosť,

$$\max_{c_l} v_{i+1} \quad (31)$$

kde našou premennou je súčiniteľ aerodynamického vztlaku  $c_l$ .

## 2.2.2 Priblíženie metódy riešenia

Nakoľko je vyššie formulovaná úloha stále náročná, zjednodušíme ju. Interval  $c_l \in \langle -4; 0 \rangle$  transformujeme na spočetnú množinu bodov. Na podobnom princípe pracujú všetky numerické metódy vytvorené na počítači. Označíme  $N$  ako počet ekvidistančných delení spomínaného intervalu a  $h = \frac{4}{N}$  ako dĺžku delenia. Spočetnú množinu prípustných riešení  $c_l$  definujeme nasledovne:

$$c_l \in \{-4; -4 + h; -4 + 2h; \dots; -4 + (N - 1)h; (-4 + Nh) = 0\} \quad (32)$$

Po tejto úprave sa riešenie podstatne zjednodušilo. Použijeme metódu „hrubej sily“, ktorá je schopná zaručiť optimálny výsledok. Algoritmus je jednoduchý: „Spočítaj funkčné hodnoty v každom uzle premennej a zvol optimálne riešenie.“ V našom prípade nájdené riešenie bude síce optimálne, ale len vzhľadom k spočetnej množine prípustných riešení. Zvyšovaním  $N$  sa môžeme dostať veľmi blízko k optimálnemu riešeniu vzhľadom k spojitému intervalu  $c_l \in \langle -4; 0 \rangle$ , no tu sme obmedzovaní výpočtovou technikou. Platí, že s rastúcim  $N$  nám rastie aj čas výpočtu. Tomuto javu sa viac venujeme v kapitole 3.

## 2.2.3 Presná formulácia riešenia

Tak ako v predchádzajúcej úlohe, tak aj v tomto prípade je potrebné spočítať rýchlostnú charakteristiku, ktorá bude obmedzená jedine krivosťou a maximálnou rýchlosťou. Rozdiel však bude v tom, že už uvažujeme o modeli s nastaviteľným krídlom. Preto okrem rýchlostnej charakteristiky hľadáme aj optimálnu charakteristiku súčiniteľa aerodynamického vztlaku. Účelová funkcia má rovnaký tvar ako (30). Predpíšeme prvé obmedzenia:

$$\left( \frac{a + bv_{dovolené} + \frac{1}{2}[k(c_l - c_{l0})^2 + c_{d0}]\rho S_x v_{dovolené}^2 + Mg \sin \theta_{i+1}}{\mu_x \left( Mg \cos \theta_{i+1} - \frac{1}{2} c_l \rho S_x v_{dovolené}^2 \right)} \right)^2 + \left( \frac{Mk v_{dovolené}^2}{\mu_y \left( Mg \cos \theta_{i+1} - \frac{1}{2} c_l \rho S_x v_{dovolené}^2 \right)} \right)^2 \leq 1 \quad (33)$$

Toto obmedzenie je podobné (28), odlišuje sa predpokladom  $a_x = 0$ . Druhé a tretie obmedzenie je totožné s (27) a (30).

Keďže uvažujeme o rozšírenom modeli s nastaviteľným krídlom, algoritmus riešenia je nasledovný. Predpíšeme rýchlosť v bode 0. Prejdeme do bodu 1, ktorý je popísaný súradnicami X, Y, Z a krivosťou  $\kappa$ . Zvolíme  $c_l = -4$  a spočítame rýchlosť a všetky ostatné veličiny podobne ako sme to popísali v kapitole 2.1.3 - Zrýchlenie. Rozdiel spočíva v tom, že  $v_{Amax}$  spočítame z (33) a intervaly budeme mať len dva a to  $\langle 0, v_{Amax} \rangle$  a  $\langle 0, v_{max} \rangle$ . Ich prienikom a voľbou najväčšieho prvku dostaneme výslednú hodnotu, ktorú zapíšeme. Potom nastavíme  $c_l = -4 + h$  a opäť spustíme metódu na nájdenie optimálnej rýchlosti. Výsledné hodnoty rýchlosti a zvyšných veličín zapíšeme. Takto vypočítame hodnoty v každom bode množiny (32). Z nich následne vyberieme bod s maximálnou rýchlosťou  $v_{dovolené_1}$  a príslušné hodnoty zvyšných veličín. Posunieme sa na trati do bodu 2 a algoritmus opakujeme, pokiaľ neprídeme do cieľa. V niektorých bodoch bude rýchlosť  $v_{dovolené_i}$  klesať, pričom metódu na brzdenie nebudeme používať. Takto získaná rýchlostná charakteristika je závislá jedine od krivosti trate.

Po príprave tohto medzivýpočtu môžeme objasniť hlavnú výpočtovú metódu nášho programu. Nastavíme rýchlosť v bode 0. Posunieme sa do bodu 1. Hľadáme optimálnu rýchlosť  $v_1$ . Pri výpočte postupujeme presne tak, ako sme to opísali v kapitole 2.1.3. Rýchlostný interval predpísaný obmedzením (27) ostáva v nezmenenom tvare. Interval od adhézneho sily spočítame pomocou predpisu (28) a interval od výkonu pomocou (29). Na získané intervaly použijeme operáciu prieniku. Hodnotu maximálnej rýchlosti výsledného intervalu zapíšeme. Celý postup opakujeme pre všetky body množiny súčiniteľov aerodynamického vztlaku (32). V tomto mieste výpočtu máme množinu maximálnych rýchlostí v závislosti na  $c_l$ :

$$M_1 = \{v_1(-4), v_1(-4 + h), \dots, v_1(-4 + (N - 1)h), v_1(0)\}$$

Podľa maximálnej hodnoty tejto množiny zistíme, aký pohyb vykoná model auta:

- zrýchlenie v prípade, že platí  $\max M_1 \leq v_{dovolené_1}$ . Potom  $\max M_1$  označíme za optimálnu rýchlosť a príslušnú hodnotu  $c_l$  za optimálny súčiniteľ aerodynamického vztlaku v bode 1.
- brzdenie v prípade, že platí  $\max M_1 > v_{dovolené_1}$ . Potom  $v_{dovolené_1}$  označíme za optimálnu rýchlosť a príslušnú hodnotu  $c_l$  za optimálny súčiniteľ aerodynamického vztlaku v bode 1. V tomto prípade je nutné pomocou spätnej iterácie upraviť pôvodné hodnoty optimálnych rýchlostí tak, aby bola splnená podmienka adhézneho sily (16). Hodnotu  $v_{i-k}$  v tomto prípade počítame pre

všetky body množiny (32). Preto výsledná optimálna rýchlosť  $v_{i-k}$  je najväčší prvok množiny:

$$M_{i-k} = \{v_{i-k}(-4), v_{i-k}(-4 + h), \dots, v_{i-k}(-4 + (N - 1)h), v_{i-k}(0)\}$$

Posunieme sa do bodu 2 a celý výpočet opakujeme. Pokračujeme až do posledného bodu trajektórie. V každom bode nesmieme zabudnúť dopočítať zvyšné veličiny, obzvlášť dôležitý je čas medzi jednotlivými bodmi.

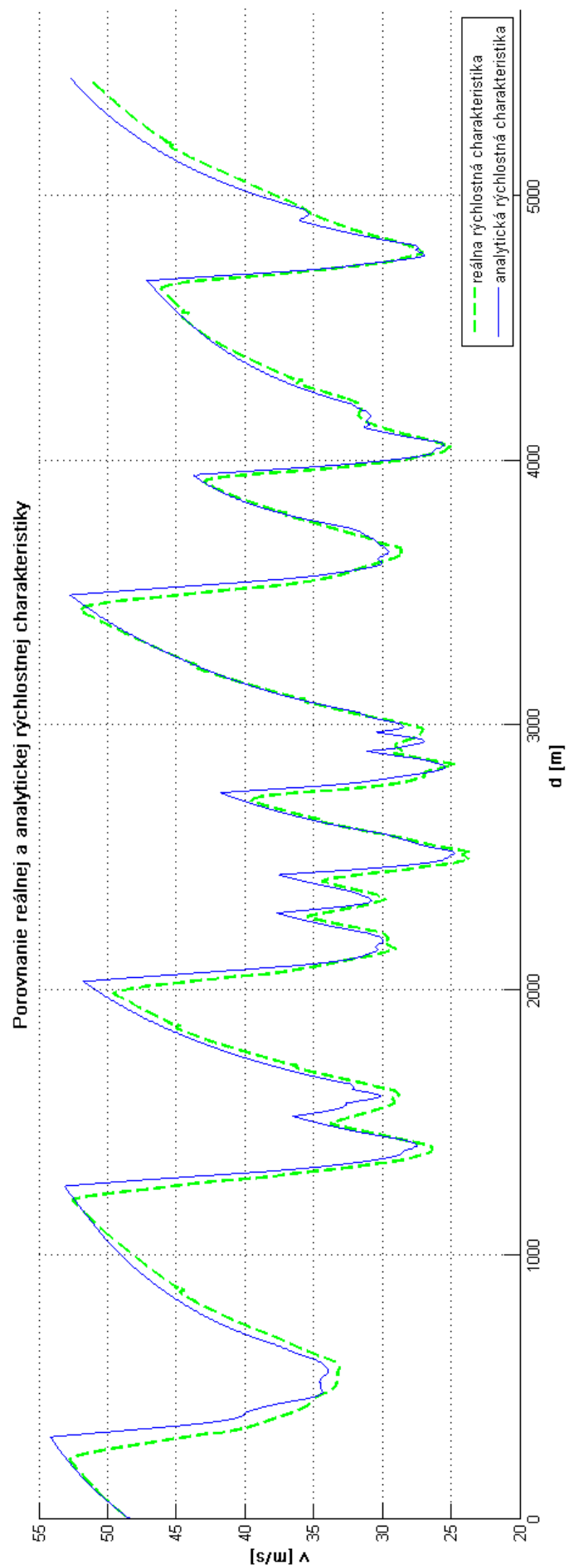
Výslednú hodnotu účelovej funkcie, čiže celkový čas prejazdu zvolenou trajektóriou, získam sčítaním všetkých časových úsekov medzi jednotlivými bodmi:  $t = \sum_{i=0}^n \Delta t_{i+1}$ .

### 3. Interpretovanie výsledkov

#### 3.1 Výsledky prvého optimalizačného problému

V prvom optimalizačnom probléme sme riešili základný model automobilu bez rozšírenia v podobe nastaviteľného krídla. Našou úlohou bolo nájsť optimálnu rýchlosť v závislosti od času  $t$  alebo od dráhy  $d$  tak, aby sme minimalizovali celkový čas  $t$ . Výsledná rýchlostná charakteristika je zobrazená na obr. 9, modrou neprerušovanou čiarou. Počiatočnú rýchlosť sme nastavili na  $v = 48 \text{ ms}^{-1}$ . Zvyšné vstupné parametre (napr. súčiniteľ trenia v smere x/y  $\mu_x/\mu_y$ , váha  $M$ , plocha čelného priemetu  $S_x$  atď.) sme sa snažili priblížiť parametrom testovacieho automobilu Lotus. Zelenou prerušovanou čiarou je znázornená rýchlostná charakteristika testovacieho automobilu Lotus, ktorá bola nameraná na Masarykovom okruhu spolu so vstupnými dátami. Výsledný celkový čas nášho analytického riešenia je  **$t = 142,86 \text{ s}$**  a celkový čas nameraný na okruhu je  **$t = 147,3 \text{ s}$** .

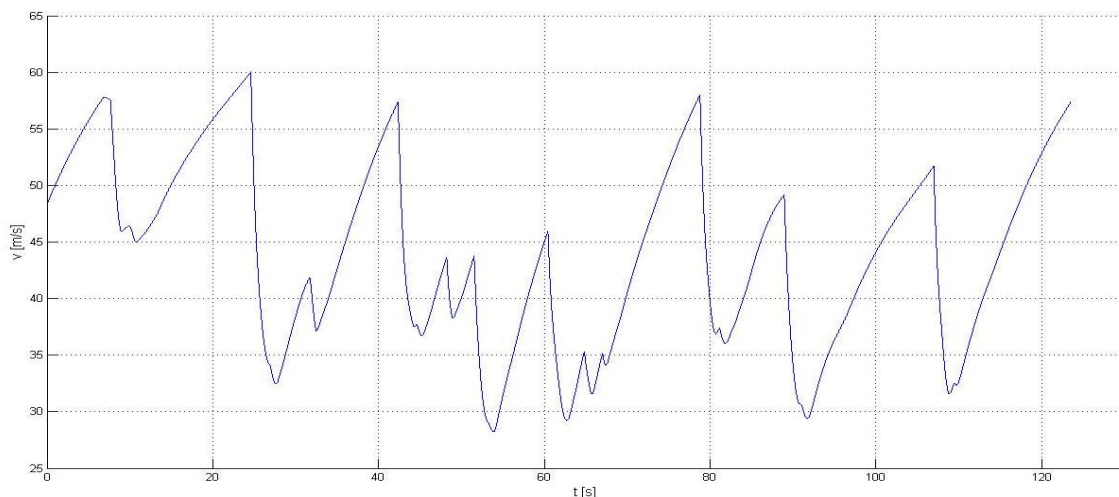
Rozdiel vo výsledných časoch nám hovorí, že šofér Lotusu nešiel dostatočne rýchlo a je tu priestor, kde môže svoj čas vylepšiť. Náš analytický model umožňuje šoférovi zajazdiť aj lepši čas než je celkový analytický čas. Toto špecifikum spočíva v tom, že analytický model počíta s nepremennivým počasím a povrchom dráhy, čo sa odzrkadľuje na konštantných hodnotách súčiniteľov trenia.



Obr. 9 Porovnanie reálnej a analytickej rýchlostnej charakteristiky

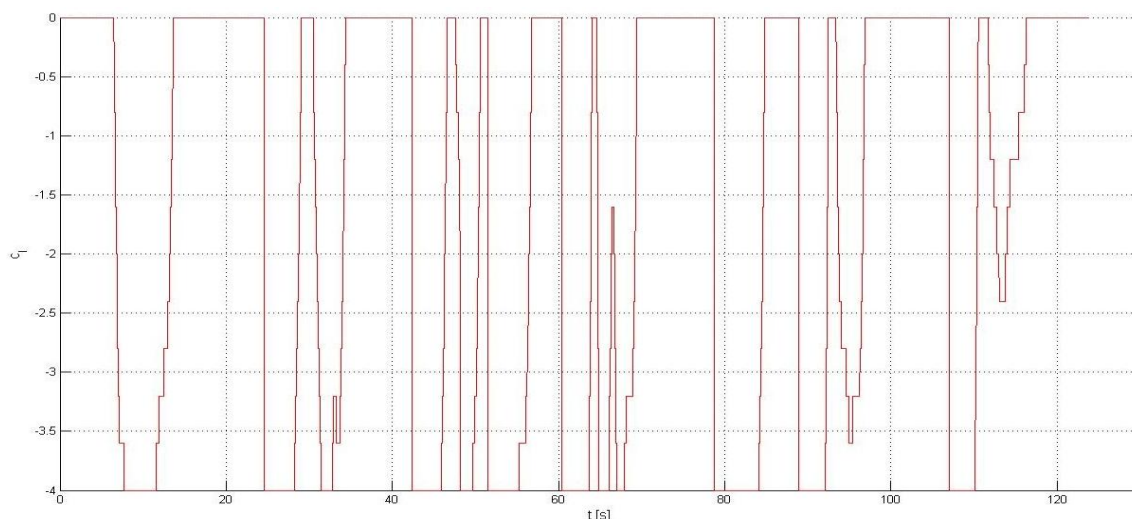
### 3.2 Výsledky druhého optimalizačného problému

V druhom optimalizačnom probléme riešime model automobilu rozšírený o nastaviteľné krídlo. Pri tejto úlohe hľadáme optimálnu rýchlosť a optimálny súčiniteľ aerodynamického vztlaku  $c_l$  tak, aby sme opäť minimalizovali celkový čas. Teraz sú naším výstupom dve charakteristiky. Na obr. 10 je vykreslená optimálna rýchlosť v závislosti od času a na obr. 11 je charakteristika súčiniteľa aerodynamického vztlaku závislého od času.



Obr. 10 Optimálna rýchlostná charakteristika modelu s krídlom

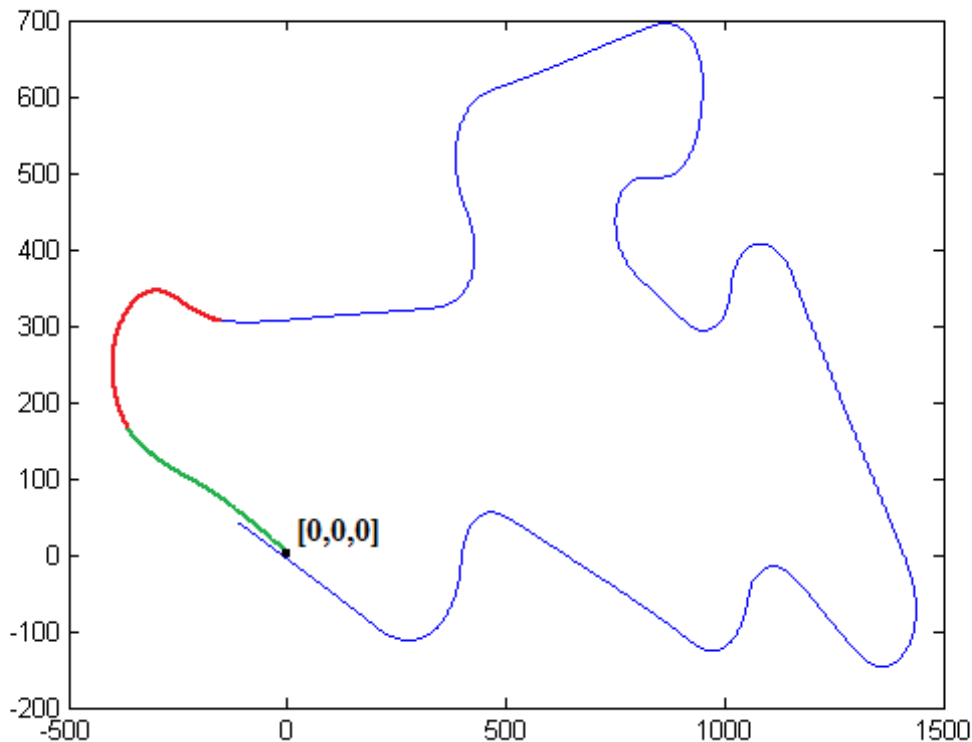
Výsledný čas rozšíreného modelu pri rovnakých vstupných parametroch je  **$t = 123,50$  s**. Pri tejto charakteristike je delenie intervalu prípustných riešení súčiniteľa aerodynamického vztlaku nastavené na  $N = 10$ . Z rozdielu výsledných časov prvého a druhého modelu je jasne viditeľný pozitívny vplyv nastaviteľného krídla na minimalizáciu celkového času.



Obr. 11 Optimálna charakteristika súčiniteľa aerodynamického vztlaku

Priebeh týchto charakteristík môžeme opísať nasledovne. Automobil štartuje v bode  $[0,0,0]$ . V prvých okamihoch pohybu prechádza auto rovinkou, ktorá je na obr.12 zvýraznená zelenou farbou. Nič nám nebráni v tom, aby sme zrýchľovali, čo vidieť na obr. 10 (rastie rýchlosť) a keďže potrebujeme minimálny odpor, krídlo je

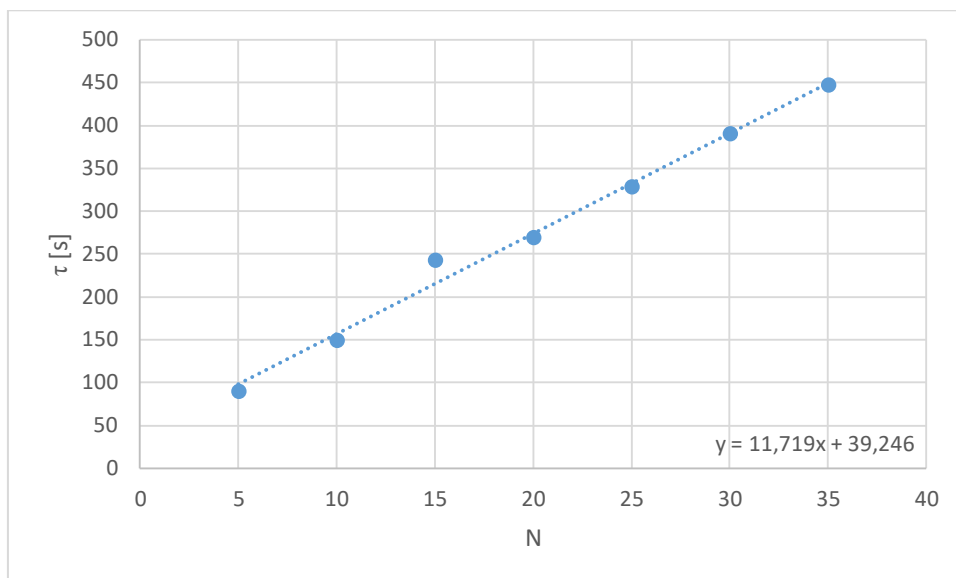
nastavené v polohe  $c_l = 0$ . Následne automobil vchádza do zákruty, na obr. 12 je označená červenou farbou, a začína brzdiť. Aby sme mohli zákrutu prejsť čo najrýchlejšie, potrebujeme maximálny prítlak, teda postupne sa dostaneme na hodnotu  $c_l = -4$ . Tento trend je badateľný počas celého prejazdu danou trajektóriou.



Obr. 12 Masarykov okruh – farebné znázornenie

### 3.3 Časová náročnosť výpočtu

V tejto kapitole sa budeme zaoberať časovou náročnosťou výpočtu  $\tau$ . Pri zjednodušovaní sme previedli druhý optimalizačný problém na úlohu, ktorú počítame numericky. Táto úprava vniesla do výsledku chybu, ktorá je nepriamo úmerná počtu delení  $N$ . Je jasné, že ak chceme mať chybu čo najmenšiu, musíme interval (32) rozdeliť dostatočne veľkým počtom uzlov. Tu nastáva problém. Naše možnosti sú obmedzené výpočtovou technikou. Preto prevedieme niekoľko meraní za účelom prognózy časovej náročnosti výpočtu v závislosti od hodnoty počtu delení  $N$ . Výsledný graf je na obr. 13. Pomocou regresnej analýzy a metódy najmenších štvorcov sme dospeli k výslednej závislosti  $\tau = 11,719N + 39,246$ . Čiže v prípade, že by sme chceli chybu úplne vylúčiť, to znamená  $N \rightarrow \infty$ , je podľa nájdenej závislosti nemožné sa dopočítať optimálneho riešenia v konečnom čase. Avšak pri zvyšovaní nad  $N = 50$ , hodnota celkového času prejazdu  $t$  sa zlepšuje rádovo v desaťtisícinách sekundy, čo je už pre nás relatívne zanedbateľné.



*Obr. 13 Časová náročnost výpočtu*



## Záver

Práca sa skladá z troch kapitol, v ktorých sme sa snažili splniť ciele vytýčené na začiatku práce. Prvým cieľom bolo popísať dynamiku vozidla a zostaviť príslušný matematický model. Toto sme dosiahli pomocou znalosti elementárnych fyzikálnych zákonov, špeciálne 2. Newtonov zákon.

Druhou metou bola formulácia optimalizačného problému a jeho implementácia v prostredí MATLAB. V kapitole č. 2 sme sa tejto problematike podrobne venovali, kde sme sa opierali o poznatky práce [3]. Úlohu sme si zjednodušili a modifikovali podľa našich potrieb. Sformulovanú optimalizačnú úlohu sme previedli na úlohu numerickej optimalizácie, pričom pre nájdenie riešenia sme použili metódu úplnej enumerácie.

Ďalšou úlohou bolo nami zostavený program použiť pre riešenie na reálnych dátach. Tento cieľ sme splnili v poslednej kapitole, kde sme našli optimálnu rýchlostnú charakteristiku a porovnali ju s reálnou rýchlostnou charakteristikou, ktorá bola nameraná v rámci skúšok Ústavu automobilového a dopravného inžinierstva na Masarykovom okruhu v Brne.

Poslednou problematikou ktorej sme sa v práci venovali bolo skúmanie vplyvu nastaviteľného krídla na celkový čas. Vďaka modifikácii už riešenej optimalizačnej úlohy sme dospeli k jasným výsledkom. Tento aerodynamický prvok mal naozaj veľký vplyv na zmenšenie celkového času prejazdu, čo jasne dokazujú výsledné celkové časy modelu bez krídla a modelu s krídlom.

Model, ktorý práca v súčasnosti využíva je možné ešte ďalej spresňovať, prípadne ďalej rozširovať podobne, ako sme ho rozšírili o nastaviteľné krídlo, za účelom skúmania minimalizácie celkového času. Keďže program je navrhnutý tak aby bol čo najviac všeobecný, je možné namodelovať akýkoľvek automobil a hľadať jeho optimálnu rýchlostnú charakteristiku na akomkoľvek okruhu. Uplatnenie by mohol nájsť aj pri závodoch študentských formúl, ktorých sa FSI pravidelne zúčastňuje.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] DOUPOVEC, Miroslav. *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*. Brno: PC-DIR, 1999, 83 s. ISBN 80-214-1470-7.
- [2] VLK, František. *Dynamika motorových vozidel: jízdní odpory, hnací charakteristika, brzdění, odpružení, řiditelnost, ovladatelnost, stabilita*. Brno: Nakladatelství a vydavatelství Vlk, 2000, 434 s. : il. ; 23 cm. ISBN 80-238-5273-6.
- [3] VELENIS, E. a P. TSOTRAS. Minimum-Time Travel for a Vehicle with Acceleration Limits: Theoretical Analysis and Receding-Horizon Implementation. *Journal of Optimization Theory and Applications* [online]. Boston: Springer US, 0808, **138**(2), 275-296 [cit. 2017-05-20]. DOI: 10.1007/s10957-008-9381-7. ISSN 0022-3239.
- [4] CASANOVA, D., R.S. SHARP a P. SYMONDS. Minimum Time Manoeuvring: The Significance of Yaw Inertia. *Vehicle System Dynamics* [online]. Taylor, 2000, **34**(2), 77-115 [cit. 2017-05-20]. DOI: 10.1076/0042-3114(200008)34:2;1-G;FT077. ISSN 0042-3114.
- [5] VELENIS, Efstathios, Panagiotis TSOTRAS a Jianbo LU. Optimality Properties and Driver Input Parameterization for Trail-braking Cornering. *European Journal of Control* [online]. Elsevier, 2008, **14**(4), 308-320 [cit. 2017-05-20]. DOI: 10.3166/ejc.14.308-320. ISSN 0947-3580.
- [6] LEPETIČ, Marko, Gregor KLANČAR, Igor ŠKRJANC, Drago MATKO a Boštjan POTOČNIK. Time optimal path planning considering acceleration limits. *Robotics and Autonomous Systems* [online]. Elsevier B.V, 2003, **45**(3), 199-210 [cit. 2017-05-20]. DOI: 10.1016/j.robot.2003.09.007. ISSN 0921-8890.
- [7] Car Aerodynamics Basics and How-To Design Tips. *Build Your Own Race Car!* [online]. [cit. 2017-05-24]. Dostupné z: <http://www.buildyourownracecar.com/race-car-aerodynamics-basics-and-design/>

## **Prílohy**

### **Prílohy zapísané na CD:**

exportCurv.xlsx  
exportSuja.xlsx  
version1\_05.m  
version1\_07.m  
vypocetny\_cas.xlsx